Zadanie 15. (0–1)

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(0,0)$, $B=(4,2)$, $C=(2,6)$ jest równe

A. 5 **B.** 10 **C.** 15 **D.** 20

- Pole trójkąta

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ oraz $C=(x_C,y_C)$ jest równe:

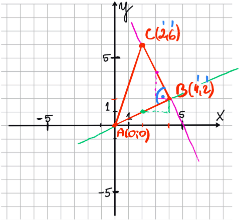
$$\boxed{P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot|(\overset{4}{x_B}-\overset{0}{x_A})(\overset{6}{y_C}-\overset{0}{y_A})-(\overset{2}{y_B}-\overset{0}{y_A})(\overset{2}{x_C}-\overset{0}{x_A})|}$$

$$=\frac{1}{2}|4\cdot6-2\cdot2|=\frac{1}{2}|24-4|=\frac{1}{2}\cdot|20|=$$
$$=10$$

Zadanie 15. (0–1)

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(0,0)$, $B=(4,2)$, $C=(2,6)$ jest równe

A. 5 B. 10 C. 15 D. 20



$a_{CB} = \frac{-2}{1} = -2$

$a_{AB} = \frac{1}{2}$

$a_{CB} \cdot a_{AB} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$\Downarrow$

$\overline{CB} \perp \overline{AB}$

$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CB|$

$|AB| = \sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$|BC| = \sqrt{(2-4)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$

- Długość odcinka

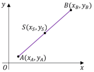
Długość odcinka AB o końcach w punktach $A=(x_A, y_A)$ oraz $B=(x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Współrzędne środka odcinka

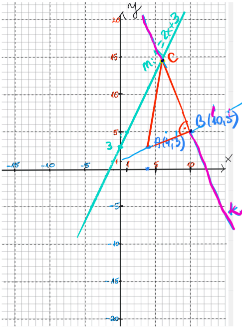
Współrzędne środka $S=(x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A=(x_A, y_A)$ oraz $B=(x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$



Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.



$l \perp k$

✓ ① a_l

✓ ② a_k

③ $B \in k \Rightarrow b$

④ $C: \begin{cases} k \\ m \end{cases}$

$k: y = a_k \cdot x + b$

① $a_l = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{10-4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

② $a_k = -\frac{1}{a_l} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$

③ $k: y = -3x + b$

$B \in k: 5 = -3 \cdot 10 + b \Rightarrow 5 = -30 + b \Rightarrow 35 = b$

④ $C \begin{cases} k: y = -3x + 35 \\ m: y = 2x + 3 \end{cases}$

$-3x + 35 = 2x + 3$

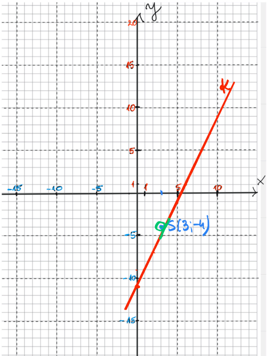
$-5x = -32 \quad |:(-5)$

$\begin{cases} x = \frac{32}{5} \\ y = 2 \cdot \frac{32}{5} + 3 = \frac{64}{5} + \frac{15}{5} = \frac{79}{5} \end{cases}$

Odp: $C\left(\frac{32}{5}; \frac{79}{5}\right)$

$k: y = 2x - 11$

$a = \frac{2}{1}$



Zadanie 41.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S = (3, -4)$ i prosta k o równaniu $2x - y - 11 = 0$.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej k w punkcie P.

$k: y = 2x - 11$

Zadanie 41.1. (0–2)

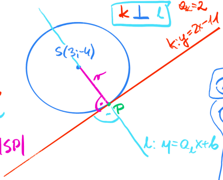
Wyznacz i zapisz równanie okręgu $\mathcal{O}$.

Zadanie 41.2. (0–2)

Oblicz współrzędne punktu P, w którym okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej k.

PLAN:

1. a_l
2. $S \in l$, b
3. $P \begin{cases} k \\ l \end{cases}$
4. $r = |SP|$



$\boxed{k \perp l}$ $a_k = 2$

$\mathcal{O}: (x - \overset{a}{x_S})^2 + (y - \overset{b}{y_S})^2 = r^2$

$(x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$

(1) $a_l = -\frac{1}{a_k} = -\frac{1}{2}$

(2) $l: y = -\frac{1}{2}x + b$

$S \in l: -4 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$

$-4 = -\frac{3}{2} + b$

$b = -\frac{8}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$

$l: y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

41.2

(3) $P \begin{cases} k: y = 2x - 11 \\ l: y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$

$2x - 11 = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \quad / \cdot 2$

$4x - 22 = -x - 5$

$5x = 17 \quad / : 5$

$\begin{cases} x = \frac{17}{5} \\ y = 2 \cdot \frac{17}{5} - 11 = \frac{34}{5} - \frac{55}{5} \end{cases}$

$y = -\frac{21}{5}$

$P\left(\frac{17}{5}; -\frac{21}{5}\right)$

(4) $r = \sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{17}{5} - 3\right)^2 + \left(-\frac{21}{5} + 4\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{17}{5} - \frac{15}{5}\right)^2 + \left(-\frac{21}{5} + \frac{20}{5}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$r^2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

41.1 $\boxed{(x-3)^2 + (y+4)^2 = \frac{1}{5}}$

Zadanie 41.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S = (3, -4)$ i prosta k o równaniu $2x - y - 11 = 0$.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej k w punkcie P.

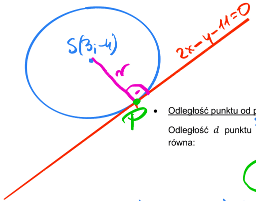
Zadanie 41.1. (0–2)

Wyznacz i zapisz równanie okręgu $\mathcal{O}$.

Zadanie 41.2. (0–2)

Oblicz współrzędne punktu P, w którym okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej k.

$r = d(S;k)$



$A=2 \quad B=-1 \quad C=-11$

- Odległość punktu od prostej

  $2x-1y-11=0$

  Odległość d punktu $P(x_0, y_0)$ [$S(3;-4)$] od prostej o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ jest równa:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4) - 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|6 + 4 - 11|}{\sqrt{5}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$r = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad r^2 = \frac{1}{5}$$